

Ejercicios de Análisis Matemático I

Desigualdades y funciones elementales

1. Estudia los intervalos en los que un trinomio de segundo grado, $p(x) = ax^2 + bx + c$, es positivo o negativo. Debes considerar todos los casos posibles según que el trinomio tenga raíces reales o no.
2. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\frac{1-2x}{x^2-4} > \frac{1}{2}$.
3. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $x^3(x+2)(x-3)^2(x+1)^5(x+5)^4 < 0$.
4. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\frac{|x-1|+2}{1+|x^2-5x+6|} < \frac{1}{3}$.
5. Supuesto que $0 < a < b$, calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

6. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.
a) $|x+5| < |x-1|$, b) $|x-1||x+2| = 3$, c) $|x^2-x| > 1$, d) $|x-y+z| = |x|-|z-y|$
7. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.
a) $|x+1| + |x-1| < 1$, b) $|2x - |2x-1|| = -2x$, c) $|2 + |x+1|| < 3$.
8. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que

$$\frac{a}{2(a+b)\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

9. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{x^2-4x-2}{x^3+1} > 0.$$

10. Calcula para qué valores de x se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{1}{1+|x-3|} < |x-6|.$$

11. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log(|x-6|(1+|x-3|))}$.
12. Prueba que la función dada por $f(x) = \frac{x}{1+x}$, es estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ . Deduce que

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

13. Prueba que la función $f: [1/2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \geq 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f .
14. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{-\sin x} + \sqrt{16-x^2}$.

15. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log \frac{x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2}}$.

16. Calcula x sabiendo que:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

17. Prueba que para todo $x \in [-1, 1]$ se verifica la igualdad

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

18. Prueba que para todo $x \in]-1, 1[$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

19. a) Prueba las igualdades:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}; \quad \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}.$$

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$ y $a \neq -1$. Definamos

$$\vartheta = 2 \arctg \frac{b}{a+1}$$

Prueba que ϑ es el único número que verifica que $-\pi < \vartheta < \pi$, $\cos \vartheta = a$ y $\operatorname{sen} \vartheta = b$.

20. Sea $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 2x + 1$. Calcula los valores de x para los que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

21. Prueba las igualdades:

$$\cos a = 4 \cos^3(a/3) - 3 \cos(a/3) = 2 \cos^2(a/2) - 1.$$

Usando que $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, deduce el valor de $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/4)$ y $\cos(\pi/8)$.

22. Dado un número entero $n \in \mathbb{Z}$, justifica que la función $f : [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, es inyectiva y expresa la inversa de f por medio de la función arcoseno. Representa gráficamente la función $h(x) = \arcsin(\operatorname{sen} x)$ para $x \in [-3\pi + \pi/2, 3\pi + \pi/2]$.

23. Justifica, usando las propiedades de la función exponencial, que la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de h .

24. a) Dado $x \in \mathbb{R}$ prueba que hay un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$.

b) Dado $x \geq 1$, prueba que hay un único $t \geq 0$ tal que $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = x$.

Sugerencia. Lo que tienes que hacer es calcular t . La sustitución $e^t = u$ te permitirá calcular u .

25. Dado un número $x \neq 0$, calcula un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{\operatorname{senh} t} = x$.